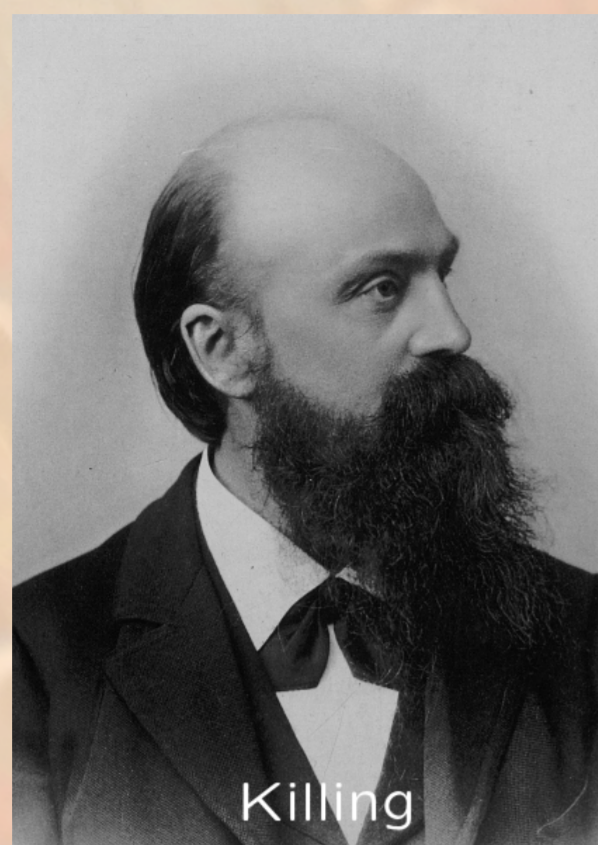
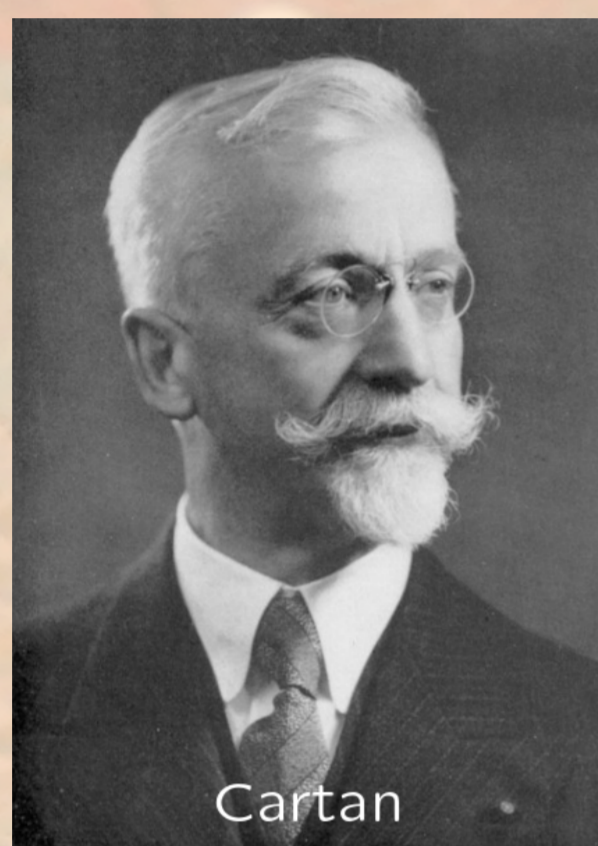


# G<sub>2</sub>ÖRBE TAMÁS F<sub>4</sub>ERENC KIVÉTE<sub>6</sub>LE<sub>7</sub>SE<sub>8</sub>N SZÉP SZIMMETRIÁK

## Történeti háttér



A komplex számtest feletti féligegyszerű Lie-algebrák osztályozása sokak szerint a matematika egyik páratlan eleganciájú és fontosságú gyöngyszeme, melyet elsőként Wilhelm Killing írt le 1888-1890 között megjelenő dolgozataiban. Ezt tette precízzé Élie Cartan 1894-es Ph.D. disszertációjában, aki a valós esetet is kidolgozta. 1947-ben az akkor 22 éves Eugene Dynkin munkája nyomán modern, letisztult formát nyert az osztályozás. Eszerint bármely komplex féligegyszerű Lie-algebra felbontható olyan egyszerű „építőkövek összegére”, amelyek négy, végtelen sok elemet tartalmazó családba rendezhetők.



Ezek jele  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ , ahol  $n$  tetszőleges pozitív egész szám, azonban létezik öt kivételes, egyik fenti családba sem tartozó Lie-algebra, jelben  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$ . Az osztályozás matematikai bizonyításban kulcsszerepet kapnak a minden információt magukban hordozó gyökrendszerek, amelyek a számok által jelzett dimenziós térben vektorok nagy szimmetriával bíró konfigurációi.



Képek forrásai: [K] ULB Münster. [C] Obituary Notices of Fellows of the Royal Society, 8(21) 71-95, 1952. [D] The Eugene Dynkin Collection, Cornell University

### E<sub>6</sub> gyökrendszer

Gyökvektorok száma: 72  
Szimmetriák száma: 51 840

### E<sub>7</sub> gyökrendszer

Gyökvektorok száma: 126  
Szimmetriák száma: 2 903 040

### E<sub>8</sub> gyökrendszer

Gyökvektorok száma: 240  
Szimmetriák száma: 696 729 600  
Csókszám 8-dimenzióban: 240

### F<sub>4</sub> gyökrendszer

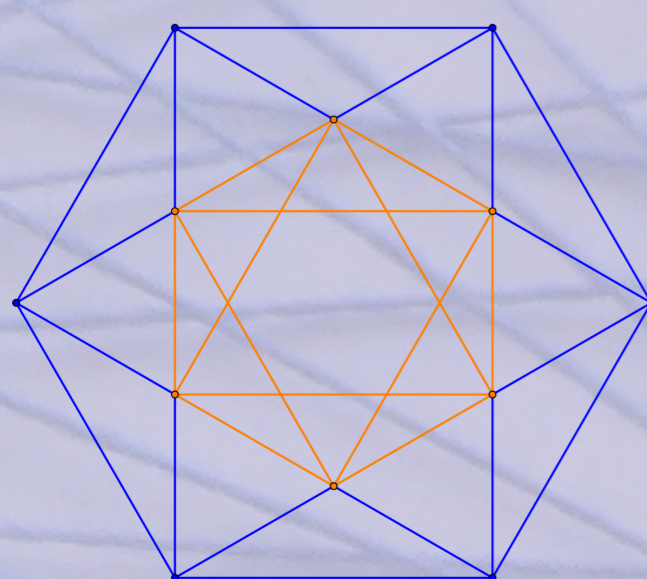
Gyökvektorok száma: 48  
Szimmetriák száma: 1152  
Csókszám 4-dimenzióban: 24

### G<sub>2</sub> gyökrendszer

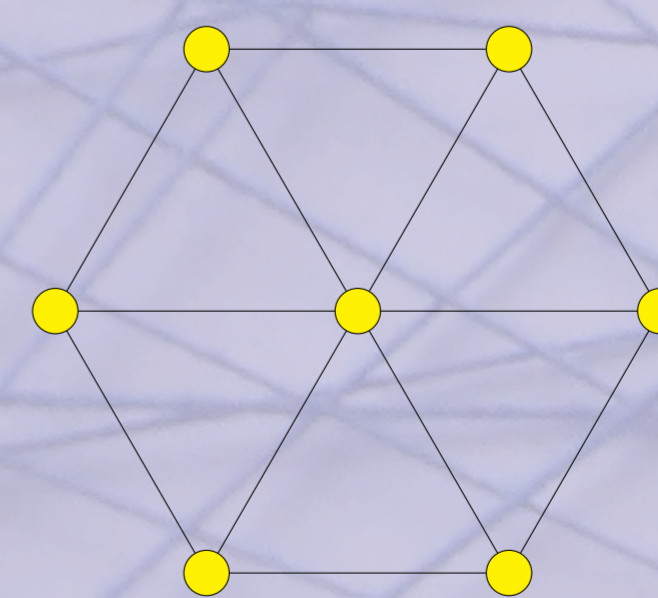
Gyökvektorok száma: 12  
Szimmetriák száma: 12  
Csókszám 2-dimenzióban: 6

## Hogyan készült?

Egy kocka sokféle árnyékot vethet, de a maximális szimmetriával rendelkező vetületet csupán néhány kitüntetett irányból, nevezetesen a négy testátló bármelyikével párhuzamosan világítva kaphatjuk meg. Lásd a mellékelt ábrát. Ez az eljárás magasabb dimenziókra is általánosítható, így az  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$  kivételes gyökrendszerek „legszimmetrikusabb árnyéka” is elkészíthető. A bemutatott fonalgrafikák gombostűi által jelölt pontok is így keletkeztek.



† G<sub>2</sub> esetén további él is behúzásra kerültek.



Még a vetítés előtt minden gyökvektort összeköttöttünk legközelebbi társaival, így jöttek létre a pontokat összekötő él<sup>†</sup>. További érdekesség, hogy a bal-jobb szimmetria miatt minden pontnál páros sok egyazon színű él fut össze, ezért ha a megfelelő körre illeszkedő pontok közül bármely kettő elérhető egymásból az adott szín mentén<sup>‡</sup>, akkor egyetlen (nagyon hosszú) cénaszálból ismétlés nélkül húzható be minden él. A gráfelméletben ezt nevezik *Euler-körnek*.

‡ Ez egy esetben nem teljesül. Vajon hol?